1115. Invariante Masse II

中野秀五郎

§4. 單一性

定理２ニ於テ如何ナル場合ニ Invariante Masse ガ unique ニナルカヲ考ヘテ見ル。§3 ノ証明ヨリ明カナヤウニ，任意ノ P ニ對シ

$$(\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n) P$$

$$(T_i \in \mathfrak{T},\ \alpha_1 + \cdots\cdots + \alpha_n = 1,\ \alpha_i \geqq 0)$$

ノ limiting point トシテ Invariante Functional P_0 ガ得ラレ、然カモ P_0 ノ任意ノ近傍間ニ正数 ε ニ対シテ $0 \leqq f \leqq 1$ ヲ與ヘレバ

$$(1)\quad \underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw}\,(\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n) P(fT) < \varepsilon$$

ナル $(\alpha_1 T_1 + \cdots\cdots + \alpha_n T_n) P$ ガ存在スル．今 $\mathfrak{R}$ ノ一点 x_0 ニ對シテ

$$P(f) = f(x_0)$$

ナル P ヲトレバ，(1) ハ

$$(2)\quad \underset{T \in \mathfrak{T}}{Schw}\,\{\alpha_1 f(T_1 T x_0) + \cdots\cdots + \alpha_n f(T_n T x_0)\} < \varepsilon$$

トナル。故ニ Tx_0 ガスベテノ T ニ対シテ $\mathfrak{R}$ ノ中ヲ dense ニ動クナレバ (2) ヨリ

$$\alpha_1 f(T_1 x) + \cdots\cdots + \alpha_n f(T_n x) < \varepsilon \qquad (x \in \mathfrak{R})$$

トナル。故ニ任意ノ f ニ對シテ $(0 \leqq f \leqq 1)$

$$P_0(f)+\varepsilon \leqq \alpha_1 f(T_1 x)+\cdots\cdots+\alpha_n f(T_n x)$$
$$\leqq P_0(f)+\varepsilon$$

ナル $\alpha_1 T_1+\cdots\cdots+\alpha_n T_n$ ガ存在スル。今 Q ヲ他ノ *invariant functional* トスレバ，此式カラ

$$P_0(f)+\varepsilon \leqq Q(f) \leqq P_0(f)+\varepsilon$$

從ツテ $Q(f)=P_0(f)$ トナル。故ニ次ノ定理ガ成立ス。

<u>定理3</u> $\mathfrak{R}$ ヲ *bicompact*，$\mathfrak{Y}$ ヲ *transformation group* トシマス。若シモ

1) <u>$\{f(Tx)\}$，$(T \in \mathfrak{Y})$ ガ *gleichartig stetig*</u>

2) <u>$\{Tx_0\}$ $(T \in \mathfrak{Y})$ ガ $\mathfrak{R}$ デ *dense* ナル様ナ $x_0 \in \mathfrak{R}$ ガ存在スレバ $\mathfrak{Y}$ ニ関シテ *invariant measure* ガ唯一ツ存在スル。</u>

此ノ定理ニ於ケル條件 1) ハ次ノ *topological* ナ條件デ置換ヘラレルコトヲ注意シマス。

1') <u>$x_1, x_2 \in \mathfrak{R}$ ($x_1 = x_2$ ノ場合モ含ム)，$\mathrm{U}(x_1)$ ヲ任意ノ x_1 ノ近傍トシタトキ，x_1, x_2 ノ近傍 $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ ヲ適當ニ定メレバ，スベテノ $T \in \mathfrak{Y}$ ニ対シテ</u>

$$\mathrm{V}_1(T\mathrm{V}_2) \neq 0 \quad \underline{ナラバ} \quad T\mathrm{V}_2 \subset \mathrm{V}$$

<u>トナル</u>。

Invariant measure ノ *uniqueness* ハ

Ergodentheorie ニ重要ナ関係ガアリマス。

例ヘバ，P_0 ガ unique ナレバスベテノ $x \in \mathcal{R}$ ニ對シテ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)+f(Tx)+\cdots\cdots+f(T^{n-1}x)}{n} = P_0(f).$$

トナリマス。コレニ就テハ後ニ書クコトトシマス。

§5. 殆週期函數

Neumann ノ almost periodic Funktion ノ Mean ノ存在ヲ定理2カラ証明シマセウ。

此處デハ almost periodic Funktion ヲ幾分拡張シテ定義シマス。即チ

$\mathcal{R}$ ヲ topological space，$\mathcal{T}$ ヲ $\mathcal{R}$ ノ変換群，$\mathcal{R}$ ノ連續函數 $f(x)$ デ $\{f(Tx)\}$ $(T \in \mathcal{T})$ ガ uniform metric

$$d(f, g) = \sup |f(x) - g(x)|$$

ニ関シテ total beschränkt ノ時 $f(x)$ ヲ $\mathcal{T}$ ニ関スル殆週期函數ト定義シマス。

然ルトキハ §3 ノ証明ヨリ明カナヤウニ総テノ殆週期函數 f ニ対シテ

$$M(fT) = M(f), \quad M(1) = 1$$

ナル positive linear functional M ガ存在スル。

然カモ定理3ノ2)ヲ満足シテキレバ unique デアリマス。

定理2デ $\mathfrak{R}$ ヲ bicompact トシテアルノハ P_0 ヨリ measure ヲ誘出スルノト定理3ノ1)カラ $\{f(Tx)\}$ ガ total beschränkt ナルコトヲ証明スルノニダケ必要ナノデ、其ノ他ハ全ク topology ガ不要ナノデス。然シ topology ヲ入レテ考ヘタ方ガ尚一層一般ナノデアリマス。又 $\mathfrak{R}$ ハ bicompact デナクドモ、拡大シテ bicompact ニシテ考ヘテモヨイコトデスカラ、其点カヲ見レバ bicompact ノ場合ガ一般カモ知レマセン。

§6 locally bicompact ノ場合

定理1及ビ2ニ於テモ§5ニ述ベタル如クニ $\mathfrak{R}$ ガ bicompact ト云フコトハ本質的デハアリマセン。然シコノ場合デモ得ラレル invariant measure ハ何時モ $m(\mathfrak{R})=1$ デアリマス。此処デハ $m(\mathfrak{R})=+\infty$ ノ場合ヲ考ヘテ見マセウ。其ノタメニハ準備定理ノヲ少シ拡大シナケレバナリマセン。

$\mathfrak{M}$ ヲ semi-ordered linear space トシマス。今 $\mathfrak{M}$ ノ Functional P デ次ノ如キモノヲ考ヘマス。

$$0 \leqq P(a) \leqq \infty \quad (a \geqq 0) \quad P(0)=0$$

$$P(\alpha a+\beta b)=\alpha P(a)+\beta P(b)$$
$$(\alpha,\ \beta\geqq 0)$$

此ノ如キPノ全体ヲ $\mathfrak{P}$ トシマス。P_0 ノ近傍ヲ

$$|P(a_i)-P_0(a_i)|<\varepsilon \quad (P_0(a_i)<+\infty\ ナレバ)$$
$$P(a_i)>\frac{1}{\varepsilon} \quad (P_0(a_i)=+\infty\ ナレバ)$$
$$a_i\geqq 0 \quad i=1,2,\cdots\cdots,n$$

ナルPトシマス。然ルトキハ

<u>豫備定理2. $\mathfrak{P}$ ハ bicompact Hausdroff space デアリマス。</u>

次ニ locally bicompact space R ノ上ノ measure m ニツイテノ注意ヲ述ベマセウ。

f ヲ R ノ上デ連續ニシテ $E[x:|f(x)|>0]$ ノ closure ガ bicompact ナ函數 f ノ全体トシマス。然ルトキハ

<u>豫備定理3. f ノ positive linear Funktional P ト R ノ上ノ measure m ト一對一ニ</u>

$$P(f)=\int_R f\,dm$$

<u>ナルヤウニ對應セシメラレル。</u>

§2 ノ証明カラ直チニ次ノ定理ガ得ラレマス。

<u>定理4. R ガ locally bicompact ナル場合.</u>

次ノ如キP及ビ$e \in \mathfrak{F}$ $(e > 0)$ ガ存在スレバ

即チ

$$(*) \quad 0 < \alpha < \frac{P(eT)}{P(e)} < \beta \qquad (T \in \mathfrak{Y})$$

ナレバ，$\mathfrak{Y}$ ガ abelian ノ時ハ，常ニ

$$P_0(e) = 1, \quad P_0(fT) = P_0(f)$$

ナル P_0 ガ存在スル。

(*)ハ topological ニ次ノ條件デ置換ヘルコトガ出来マス。

(**) $\mathfrak{R}$ ノ上ニ点集合 S ト open set U ガ存在シテ，$\overline{U}$ ハ bicompact 且ツ TU $(T \in \mathfrak{Y})$ ト S トハ必ズ共通点ガアッテ其ノ個數ハ有界デアル。

又§3ヨリ定理2ノ拡張トシテ

定理5. (*)ヲ満足スルP，eガ存在シ、且ツ$P(fT)$ガTノ函數トシタ側的週期函數ナルトキハ$P_0(e)=1$，$P_0(fT)=P_0(f)$ナルP_0ガ存在スル。

—— 18. 3. 12 ——